

教育部顧問室

98 學年度第一學期優質通識教育課程計畫

期末成果報告書

課程名稱	數學與藝術—理性與感性的交會		
計畫類別	A 類：技專校院類組		
計畫主持人	劉柏宏	服務單位	國立勤益科技大學 通識教育中心
教學助理	丁俊銘	學校系所	國立勤益科技大學 化材系碩士班
教學助理	李昀儒	學校系所	國立勤益科技大學 工管系碩士班
教學助理	鐘培中	學校系所	國立勤益科技大學 電子系碩士班
網站助理	胡冠男	學校系所	國立勤益科技大學 電子系碩士班
計畫期程	98/08/01~99/01/31		
課程網址	http://gen.ncut.edu.tw/teacher/math/homepage/liu/mathart		

繳交日期：中華民國 99 年 1 月 31 日

目 錄

計畫宗旨	1
計畫目標	1
基本資料摘要表	2
計畫內容及執行情形	7
課程主題內容說明	8
學生期中作業與期末作品	35
經費運用情形	36
執行成果分析與檢討	37
結論與建議	38

教育部顧問室 98 學年度第 1 學期優質通識教育課程計畫期末成果報告

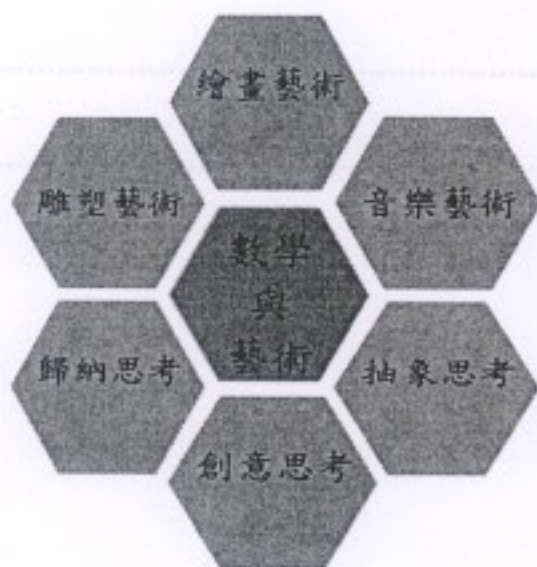
課程名稱：數學與藝術—理性與感性的交會

計畫宗旨

本課程計畫希望透過課堂講述、專家演講、活動操作和小組討論等等方式，讓學生親身體驗「藝術中的數學思考」和「數學中的思考藝術」，以更進一步對於數學本質和藝術本質之間的異同能有所體認。

計畫目標

數學與藝術經常被視為人類知識屬性的兩個極端—前者為理性思維的產物，後者則是感性認知的結晶。也因為分立兩端，世人容易分辨兩者之異，卻幾乎難以察覺兩者之同。殊不知，在人類歷史的發展上，數學與藝術著實有著密切的關聯。本課程計畫從知識融通的角度嘗試建構出兩者的共同構面，以實現讓學生體驗「藝術中的數學思考」和「數學中的思考藝術」的課程宗旨。本課程計畫總共包含：繪畫中的數學、雕塑藝術中的數學、音樂藝術中的數學、歸納思考的藝術、抽象思考的藝術和創意思考的藝術等六大區塊(圖一)。



圖一

為呼應上述主張，本課程的具體目標有下列幾項：

- 一、從歷史角度讓學生瞭解黃金比例與透視法則的數學淵源，和它們在藝術中之應用；
- 二、嘗試了解並親自體驗藝術家以幾何物件融入作品的想法，和他們數學靈感的來源；
- 三、從歷史角度讓學生瞭解音樂和數學的關聯，親自體驗音階與數學比例的密切關係；
- 四、透過具體操作讓學生體會數學思考的模式，例如模式歸納、抽象演繹和數學創意；
- 五、透過體驗理性和感性交會的區塊，激發學生反思數學與藝術兩者之間本質的異同。

8. 課程內容概述

<p>■ 課程目標</p>	<p>數學與藝術經常被視為人類知識屬性的兩個極端—前者為理性思維的產物，後者則是感性認知的結晶。也因為各立兩端，世人容易分辨兩者之異，卻幾乎難以察覺兩者之同。殊不知，在人類歷史的發展上，數學與藝術著實有著密切的關聯。例如，堪稱最大的藝術品的古埃及金字塔和古希臘帕特農(Parthenon)神殿如今雖然已失去其當初之功能性，但其藝術性歷經數千年仍的洗鍊仍屹立不墜的原因之一是隱藏在其設計之中的數學密碼—幾何和比例。再者，文藝復興時期藝術家對於幾何比例的重視，產生了所謂「透視法」，而十六世紀「透視法」的發展更激發了後來數學「射影幾何」的誕生。文藝復興時期歐幾里德「幾何原本」的重現，也使得音樂上「十二平均律」的理想得以實現。</p> <p>另一方面，除了數學對於藝術的影響外，數學本身的藝術性也被世人嚴重忽略。數學知識本身雖具備高度的邏輯結構，但那只是保護其真理性的外衣，不是其真實內在。近年許多數學哲學家者不斷呼籲重視數學本質的人文精神，而國內通識教育的學者更強調知識的融通。本課程的目標即在呼應上述主張。課程重點有下列幾項：</p> <ol style="list-style-type: none">一、黃金比例與透視法則二、抽象繪畫的數學靈感三、音樂理論的數學密碼四、數位藝術的數學概念五、數學思考模式的藝術 <p>本課程希望透過課堂講述、專家演講、活動操作和小組討論等等方式，能讓學生體驗「藝術中的數學思考」和「數學中的思考藝術」，以更進一步對於數學本質和藝術本質之間的異同能有所體認。</p>
<p>■ 內容綱要</p>	<p>第一週：課程介紹與問卷 第二週：數學黃金比例 第三週：透視法與射影幾何 第四週：扭曲視覺的藝術家艾雪 第五週：混亂之美—碎形幾何 第六週：藝術的幾何抽象意涵 第七週：數學觸發的視覺藝術(單維彰老師演講) 第八週：碎形混沌人工生命與美學(吳文成老師演講) 第九週：期中討論</p>

	<p>第十週：數學雕塑</p> <p>第十一週：數學與音樂探索活動</p> <p>第十二週：從畢氏音階到十二平均律</p> <p>第十三週：數學思考的藝術—歸納篇</p> <p>第十四週：數學思考的藝術—抽象篇</p> <p>第十五週：數學思考的藝術—創意篇</p> <p>第十六週：博士熱愛的算式—影片欣賞</p> <p>第十七週：數學與藝術期末闖關活動</p> <p>第十八週：期末考</p>
<p>■ 分組討論及教學助理之規劃與執行現況</p>	<p>在一般正規上課中，皆有預定的討論時間約 10 至 15 分鐘。施行方式為各組分別帶開討論，計劃主持人則在旁協助。</p> <p>進行「小組討論」前，計劃主持人請教學助教事先閱讀每週之指定資料或延伸資料，並共同研商出一些討論議題。藉由助教預先閱讀的教材及當日上課的內容，在討論時間與同學進行問答。問答方式盡量以層層反問、相互討論，以激發不同的想像、釐清對話中的盲點，並檢視課程內容成效。另外，助教亦需擔負將「延伸的問題」與同學進行「課外上網討論」的工作。透過網站設計的「討論區」除了將問題繼續做無限的探索、也可以分享與課程相關的知識，提供一個相互成長的平台。此外，每一次小組討論後，各小組都須做簡要之討論記錄，經教學助教複驗後上傳至網站供所有修課同學參考。</p> <p>另外，由於本課程總共安排兩次教學活動，教學助教將協助計畫主持人於課內外時間密切觀察學生之準備情形和內容。若學生在準備的過程當中遇到任何困難，將要求教學助教隨時回報。基本上計劃主持人與教學助教之分工方式為，計劃主持人負責整體課程規劃之統籌、主題課程之講授、閱讀資料之選定、討論議題之商定、專題演講講者之邀請、與協助課堂小組討論、學期成績之評定；教學助教則負責協助計劃主持人選定討論議題、與學生進行「課堂分組討論」和「課外上網討論」、評定學生討論表現之成績。計劃主持人和教學助教每週開會檢討並報告與學生互動之情形。</p> <p>目前「課堂分組討論」的情況良好，教學助教經過經驗的累積，皆能有效的掌控學生情緒及問答情況，一切均按照表訂計畫進行。一開始「課外上網討論」學生反應仍略顯被動，不若預想熱烈，可見學生尚無法熟悉課後仍需進行線上討論的模式。經過積極鼓勵後情形已漸有改善。主持人也發現學生閱讀課外指定教材的情形仍不踴躍，除已請助教叮嚀學生下載閱讀資料並於期中討論時發表心得之外，課程將於學期倒數第二週設計問題搶答闖關活動，進一步鼓勵學生閱讀課外資料。</p>
<p>■ 「行動」、「欲解</p>	<p>(若為行動導向/問題解決導向通識課程，請務必填寫「行動(非活動)」、</p>

決的問題」之設計與規劃	「欲解決的問題（非討論的議題）」之設計與規劃）
■指定閱讀材料	<p> 美麗與神奇 劉柏宏 黃金比例:數學、藝術到大自然的瑰寶 吳文成 文藝復興時期的科學與藝術 劉柏宏 文藝復興時期的建築 劉柏宏 文藝復興時期藝術家對科學的貢獻 張之傑 不可能存在的存在—艾雪 藝術家雜誌 碎形幾何與藝術 苑玉峰 集繪畫與數學於一身—法蘭契斯卡 陳敏皓 數學與音樂對話千百年 劉柏宏/劉淑如 誕生於藝術的科學—射影幾何 黃振榮 數學的藝術 歐陽降 數學：一種別具匠心的藝術 曹恆平譯 論數學與藝術的關聯 張維忠 當代幾何抽象藝術思潮 劉永仁 </p>
■作業設計	<p> 本課程作業分為個人與團體兩部份。個人部份，每位學生於期中考週皆須繳交一份「幾何抽象畫」的作品。他們必須將指定的畫作以幾何構圖的方式做抽象處理。他們可以利用繪畫素材完成也可以以電腦繪畫軟體進行。優秀作品都已放置在課程網站上。 </p> <p> 團體作業部份以活動進行，團體表現列入成績計算，表現優異者另發與獎品。 </p> <p> 課程活動(一)：數學與音樂探索活動 </p> <p> 古希臘數學家畢達哥拉斯路經打鐵舖時發現不同重量的鐵鎚可以敲打出不同音階的樂音。之後他更進一步發現鐵鎚重量成整數比值時，所敲打出的樂音最為和諧，因而創出畢氏音階。在這節課我們將透過實際體驗活動讓學生瞭解數學與音樂的關係。 </p> <p> 我們所採用的探究工具是水和玻璃杯。一開始將學生分組(一組至少八人)，各組任務是以玻璃杯盛水之後，學生必須能以筷子敲擊玻璃杯的方式，正確地敲打出 Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do 八度音。學生成果展現方式是由各組利用玻璃水杯演奏曲子「小星星」。我們由助教與老師互評的方式，選出最佳音準的演奏團隊並頒贈小禮物。 </p> <p> 活動之後學生開始討論兩個問題：(1) 為何玻璃水杯可以敲擊出不同音階的樂音？(2) 形成不同音階的原因背後隱藏什麼數學密碼？進行討論之前，我們會發給各組量杯、直尺和量秤，以驗證他們的假設。 </p> <p> 課程活動(二)：數學思考的藝術—歸納篇 </p> <p> 在這個活動中，我們將透過梵天塔(Tower of Hanoi)這個活動，讓學 </p>

	<p>生瞭解一個數學定律形成之前，數學家如何探索規律現象。在進行活動之前，學生先了解活動情境：</p> <p>千年前一間印度古佛寺的大殿中矗立著一座有三根金柱的平台，其中最左邊的柱上套著六十四個由大而小的金環。寺內高僧交代其弟子在他圓寂之後必須每分鐘將其中一個金盤移動到另一根金柱上，不過大金盤絕對不可疊放在小金盤之上。當六十四個金盤都被移到另一根金柱時，寺廟即將倒塌，而世界也隨之毀滅。</p> <p>活動任務是學生必須計算出搬完六十四個金盤共需花多少時間。各組有一個梵天塔的教具可供操作，上面有八個圓盤，透過實際操作希望學生能發現其規律，並進一步猜測和論證搬完六十四個金盤共需花$2^{64}-1$分鐘。</p> <p>隨後學生將陸續體驗幾個簡易的數學規律猜想活動，以了解數學家如何做歸納與論證，以體會為何數學家華羅庚會說：「千古數學一大猜」！</p>
<p>■成績評定方式</p>	<p><u>出席與討論 30%</u>：本評量項目主要為督促學生養成按時到課之習慣，並鼓勵學生課內外之溝通、思考，以內化對課程主題之認知。其評分重點除考量學生參與討論之"量"外，也將與助教共同評量其"質"之良窳與否。</p> <p><u>作業與活動 20%</u>：期中作業和課程活動之目的在於觀察學生是否將課程所學融入自身概念理解之中。</p> <p><u>期末研究報告或作品 30%</u>：本評量項目主要希望學生於修習一學期之課程後，對於相關主題能有一系統性的研究與探討。其評分重點將著眼於學生對事物之析理是否周全透徹，或者作品之成熟度。</p> <p><u>期末考 20%</u>：本評量項目不在測驗學生對事實之記憶，而在探察其對數學與藝術本質和互動關係的看法。</p>

計畫內容及執行情形

整個課程計畫分十八週執行完畢，各週單元主題如表一所列。本課程除主持人授課之外，也邀請竹雕藝術創作者李弘偉老師和數位藝術工作者吳文成老師協同指導。李弘偉老師於課後指導學生創作期末作品，吳文成老師也於課後時間針對有志於學習數位藝術的同學指導兩場工作坊。另外有兩場專家演講和兩個課程活動。以下將說明各課程主題的內容和執行情形。

表一 課程進度

週別、日期	教材進度	備註
1 9/24	課程介紹與問卷	
2 10/01	數學黃金比例	
3 10/08	透視法與射影幾何	
4 10/15	扭曲視覺的藝術家艾雪	
5 10/22	混亂之美—碎形幾何	
6 10/29	藝術的幾何抽象意涵	
7 11/05	數學觸發的視覺藝術	專家演講—單維彰老師
8 11/12	碎形混沌人工生命與美學	專家演講—吳文成老師
9 11/19	期中閱讀心得討論	指定閱讀資料心得討論
10 11/26	數學雕塑	
11 12/03	數學與音樂探索活動	
12 12/10	從畢氏音階到十二平均律	
13 12/17	數學思考的藝術—歸納篇	
14 12/24	數學思考的藝術—演繹篇	12/30 數位藝術工作坊(一)
15 12/31	數學思考的藝術—創意篇	01/04 數位藝術工作坊(二)
16 01/07	博士熱愛的算式	影片欣賞
17 01/14	數學與藝術期末闖關活動	繳交作品或報告
18 01/21	期末考	

課程主題的說明

第一週 課程介紹與問卷

本週課程點在於說明課程目標與實施方式，告訴學生本課程乃一計畫性課程，因此有許多的課程要求，並有助教協助教學活動與討論。

本課程也嘗試以教育研究方式探究學生在修習本課程之前後，他們對於數學與藝術的本質觀有何的異同，問卷內容如下表所示。另外為更深入了解學生的觀點，共隨機抽出五位學生做為訪談的對象。這些學生在學期末也再度接受訪談，以釐清他們前後觀點之差異。這些資料除做為未來課程改進參考之外，計畫主持人也預計將研究成果發表至通識領域的學術期刊，以饗同行。

數學與藝術本質問卷

1. 藝術與數學有任何相似之處或相異之處嗎？試舉例說明。如何判斷甚麼樣的作品才算是藝術？請依你(妳)的經驗說明。
2. 藝術創作與藝術家的情感有關係嗎？數學創作與數學家的情感有關係嗎？藝術家與數學家創作時會用到邏輯推理嗎？為什麼？
3. 在人類歷史上，藝術與數學各是如何產生？他們的發展有沒有原則可以依循？
4. 有人主張「數學知識可以分對錯，不能分好壞；藝術作品可以分好壞，不能分對錯」。你對這說法有何看法？為什麼？
5. 有主張「藝術是在描繪大自然，數學是在解釋大自然」。你對這句話有何看法？為什麼？
6. 請各舉出藝術與數學三個最重要的特質。

達文西曾說：「科學若不曾用到任何數學，則不具備確定性」(There is no certainty in sciences where one of the mathematical sciences cannot be applied ...)

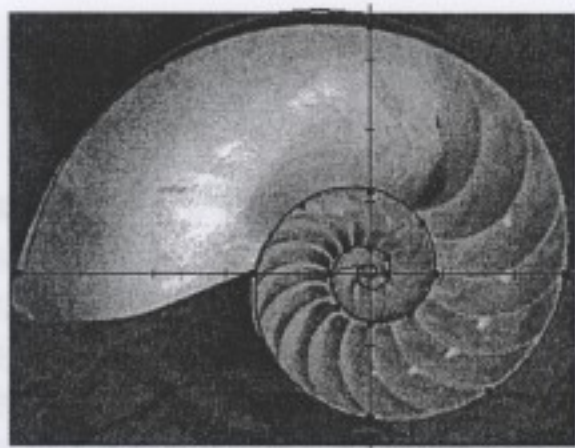
對達文西來說，藝術創作本身就是一種科學。而數學則居於關鍵地位。達文西向他的數學家好友帕奇歐里(Pacioli)學得不少數學知識，且為帕奇歐里的《神聖比例》(Divina Proportione, 黃金比例)一書畫插圖。本單元分析達文西作品中的比例應用與幾何配當。為吸引學生對本單元的興趣，我們首先播放電影「達文西密碼」前十五分鐘的一段影片。劇情中出現的黃金比例與費波那奇數列恰與本主題相符。課程主要內容：

1. 黃金比例

黃金比例--1.618:1，又稱神聖比例(divine proportion)，緣起於古希臘數學家所問的一個數學問題：給定一線段 AB，如何於 AB 間選定一點 P 使得 $AB:AP=AP:PB$ 。這問題最早被公元前四世紀的希臘數學家歐多克斯(Eudoxus)所解決。古希臘的人體雕塑藝術大致也遵照黃金比例做基準(如多利普羅斯和宙斯雕像)，達文西的「維特魯威人」比例圖(圖二)也是依照黃金比例繪製。



圖二



圖三

2. 費波那奇數列

13世紀數學家費波納奇(Fibonacci)所著《算盤書》中有一個兔子繁衍問題：

假設每對兔子剛出生滿兩個月後即可生出一對兔子，且此後每個月都可以生出一對兔子。若一開始時只有一對兔子，則往後每個月之兔子對數分別是多少？一年後有多少對兔子？

經計算後數列為：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233...。這數列的後項除以前項之比值越來越接近 1.618—即黃金比例，可為相當神奇與巧合。

本單元除介紹費波那奇數列與黃金比例的關係外，也介紹黃金比例在自然界中的對應。例如鸚鵡螺外殼剖面之對數螺旋曲線(圖三)。

小組討論：(詳細資料參見網站)

課程結束後由助教帶領各組學生進行討論。學生對於黃金比例和費波納西數列之巧合和它們與大自然物種的對應印象深刻。茲舉其中兩組助教的討論內容供參考：

1. 黃金比例和費波納奇數列是巧合嗎？

黃金比例和費波納奇數應該不算是巧合。我們認為這是存在大自然中的一種規律，只是被人類歸納成公式。大自然首先出現的東西擁有這項特質，當時的人類(也許)認為他們很漂亮，依照這比例創造東西，像是建築之類的，之後的我們，也認同這個比例，因此計算出他的比例，得到結果 $(\sqrt{5}+1)/2$ ，而後又返回來觀看這世界，才發現這是許多萬物的共通處。

2. 黃金比例和費波納奇數列與大自然生物都有些對應關係,爲什麼？

自然界裡隱含著甚多的秩序，比如說小花們以此螺旋形方式排列，可以讓每朵小花曬到最多太陽、沾到最多雨露、並擺放上最多小花數量(即留下最多的種子)。這樣可以更有效益地共享空間，並且不會讓上下左右小花處在同一軸線上而彼此擋到，或許這便是能減少無謂的能量消耗，而達到最高生產力的方式，而這種方式就在藏在費波納奇數列和黃金比例裡。而後又返回來觀看這世界，才發現這是許多萬物的共通處。

助教反思：(詳細資料參見網站)

此外，我們也請助教寫出對於參與本課程後的心得，以與學生討論內容做對照：

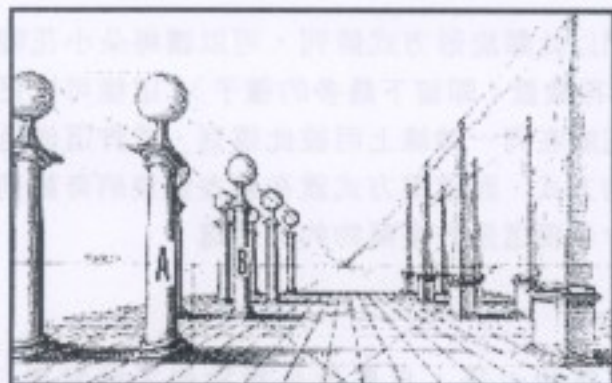
培中：

從黃金比例跟費波納奇數列的課程中讓我重新看到大自然中有許多東西都是有一套固定的模式在運作，當然黃金比例跟費波納奇數列都是很久以前就已經從課本或是課堂中學習過的東西，這次最讓我驚豔的是從”兔子問題”延伸出來的樹枝上長葉子的模式，先前種過一些有明顯莖節的植物，就有發現類似這樣的現象，但是從未聯想到費波納奇數列上，直到這次的課程才讓我把兩者關連在一起，不僅止於分支及葉子生長的模式，就連各枝葉間的角度也都隱含著黃金比例的關係，通常情況下都只會認為枝葉是爲了要取得最大的日晒才會生長成如此，沒想到原來其中就是隱藏了黃金比例的關係，真的是太神奇了。

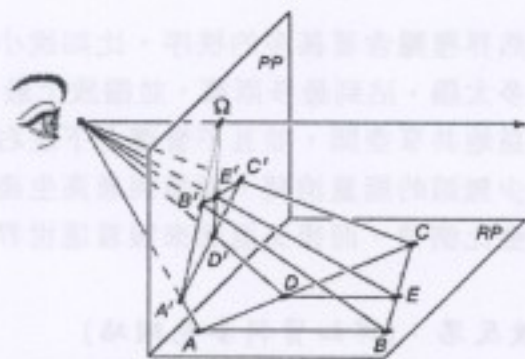
透視法之運用於繪畫始自於文藝復興時期。達文西即曾說：「透視法是繪畫的舵輪與準繩」。畫家運用透視以區分畫中景物之遠近。教堂的門雕和壁雕工匠也利用透視在僅僅吋深的厚度中製造立體效果。建築師則以地板線條和樑柱線塑造室內空間的景深。透視法源自歐幾里德幾何學，後來竟觸發了射影幾何學的發展，可說是藝術與科學互相回饋的最佳案例。主要授課內容如下：

1. 透視法

這單元將介紹透視法的基本概念與原則，如單點透視、雙點透視、消失點等等(圖四)。課程中利用中世紀不具透視技巧的繪畫和文藝復興時期的作品做比較，讓學生了解藝術家如何應用透視製造視覺效果。我們也強調透視法的發展和古希臘歐幾里德幾何學有著密切關聯。另外也列舉街頭藝術家如何玩弄透視，在地面上創造出驚奇的立體效果。



圖四 透視法則



© 2002 Encyclopædia Britannica, Inc.

圖五 射影幾何

2. 射影幾何

文藝復興時期的藝術家為了學習透視法必須鑽研歐幾里德幾何學。而當時的數學家在審視了藝術家精熟的透視技法後不禁問了一個問題：從兩個不同視角觀看同一物件所得的透視影像有什麼共同的性質？(圖五)最先研究透視學的數學家是狄沙格 (G. Desargues, 1593~1662年)。他也是位自修起家的建築師與工程師，其研究透視學的目的，在於幫助工程、繪畫以及建築界的同儕。西元1639年，他完成了一本關於射影幾何基礎的主要作品。他的狄沙格定理對後世射影幾何學的發展有舉足輕重的影響。之後數學家巴斯卡(Pascal)和布萊恩松(Brianchon)也都做過相關的研究工作。事實上世界地圖的繪製也應用到射影幾何學。所以射影幾何學的誕生可以說是藝術與數學相互回饋的一個最佳案例。

小組討論：(佩琪小組，詳細資料參見網站)

1. 什麼是透視法？和繪畫有什麼關係？

透視法就是人的眼睛從一個地方往一個看不見的物體望過去，最後形成一個消失點，這樣的繪畫技巧，讓欣賞畫的人也能感同深受、身歷其境一般，呈現一種真實感、立體感和穩地度，使我們能在 2D 的畫面中一窺 3D 世界的奧妙。

2. 透視法和幾何學有什麼關係？

攝影幾何是把線條延伸到一點形成自己的視點後之後，在這之間放一塊板子，將延伸的線條與板子接觸上的透射點，畫出來，再將點依照實際圖型的方框方向連起來形成幾何圖形，然而透視法是利用線的延伸形成焦點，兩者皆有使用到焦點，所以透視法與幾何學的關係就是在攝影幾何的技巧中形成的幾何圖形。

3. 藝術家創作時為什麼需要幾何學？

藝術家想呈現真實的感覺，運用幾何學的技巧可以把藝術家眼裡所看到的畫面，完美的呈現在觀賞者的面前，雖然是平面的畫，但卻讓觀賞者可以感受到那立體或扭曲的視覺感受。

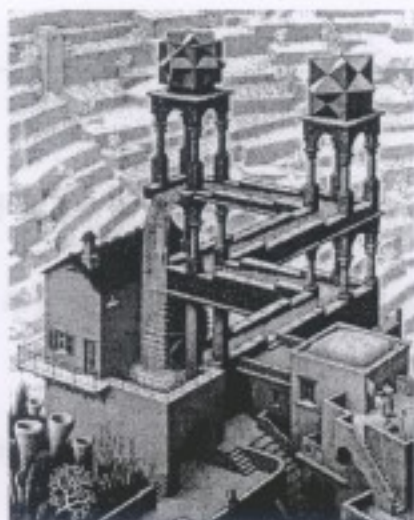
助教反思：(詳細資料參見網站)

冠男：

原來畫先經過透視法的描繪，可以讓畫出的圖比例更精確也更接近真實，而在課程中所提出的大氣透視法的概念，遠處的物體就模糊，近處的就十分清楚，跟我以前所學過的電腦圖學技術－LOD(Level of Detail)是十分相似的，利用調整鏡頭的遠近去改變物體的網格複雜度。而在變形藝術上的展現，則跟電腦圖學上的材質貼圖技術十分相像，利用角度反射的方式，重新將畫覆貼在物體體上。

第四週 扭曲視覺的藝術家艾雪

若說藝術中幾何比例和透視法的運用是一種規矩，那荷蘭藝術家艾雪(Escher)可說擅於玩弄這些規矩於股掌之間，並且開創出另一番奇異的視覺天地。例如他的「逆流？順流？」(圖六)就是精巧地設計並顛覆透視法則所形成得令人讚嘆的作品。本單元介紹艾雪的版畫藝術如何將蟲魚鳥獸人物等具象物件轉化為簡潔之幾何物件形狀後，再利用重複、旋轉、鏡射、平移等方式形成鑲嵌效果以製造虛實相間的錯覺(圖七)，相當類似抽象代數中的群論運算。再者，其後期作品的極限系列，更被認為是十九世紀「黎曼幾何」(Riemann Geometry)的具體呈現(圖八)。此外，透過巧妙的透視錯置，艾雪更營造出內外空間混淆的錯覺。



圖六 逆流？順流？



圖七 鳥和魚



圖八 極限 III

近年來，已有許多數學家紛紛研究艾雪畫中的數學意涵，並以數學運算方式解讀艾雪畫中的弦外之音。事實上，艾雪對數學的認識也僅止相當於中學階段，他曾言：「我用心去感受週遭如謎一般的現象，並對所觀察到的事物做了一些考慮及分析，最後將它們納入數學的範疇。雖然對於這門講究精確的科學，我絲毫未受過訓練，也沒有專業的知識，但是我和數學家之間共同點卻比和同行之間來的多」。艾雪的創作是藝術創作中，理性與感性交會的最佳案例。課程中也介紹艾雪畫風的轉變，和數學家對其作品的解析。

小組討論：(冠男小組，詳細資料參見網站)

Q.覺得艾雪玩弄透視，創造出奇異圖如何？

A:用透視玩弄圖畫，讓圖畫另有新的意涵，讓人思考奇創作時的想法。違反大自然法則，有時也讓看畫者自由想像的空間。

Q.為何艾雪看世界的角度如此不同？

A:在這裡我們是沒必要討論創作者的腦袋到底在想啥咪，因為我們不是艾雪肚子裡的蛔蟲。假設有個瘋子，我們有必要探討他的腦袋瓜嗎？或許因為艾雪吸毒的關係，產生幻覺，搞的上下顛倒，改變看這世界的角度。

Q.對於艾雪創造出不可能之立體之看法？

A:艾雪可能是外星人吧？真是獨特的想法，為啥咪一個正方體好好的不畫要畫的那麼怪異，異於常人的思考邏輯。之後還有人研究出那個不像立方體的立方體，這個立方體從某個角度看確實是，但是他只是妳的腦袋無法相信。

Q.為何明明是個藝術家，但在圖畫中所留露的數學概念卻比同行的多那麼多？

A:它可能是一個喜歡算數學但是又是個數學算很差的藝術家，也很有邏輯思考，再加上對演化論的邏輯思考，創造出他那麼令人嘖嘖稱其的畫，帶有"畫中有話"的感覺。

助教反思：(詳細資料參見網站)

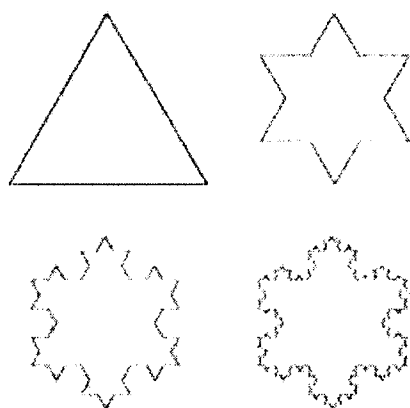
桂菁：

記得上學期第一次上艾雪這堂課，只能用驚呼連連來形容，每一個作品都讓人驚豔，而且腦袋瓜超忙碌的，顛覆了我以往對欣賞藝術作品的角度。第二次上艾雪這堂課除了複習外，更讓我有餘的時間去思考艾雪的腦袋瓜到底裝了什麼東西，會讓他這個數學不好的人，卻創作出極富有數學含義的作品。尋找他每一幅作品背後是不是還有其他涵義。今天下課前的最後一頁的問題－為何艾雪從寫實畫作到抽象畫作。讓我想到以前我們寫文章都是長篇大論，可是漸漸地會嘗試用簡單幾個字、幾句話來表達我的心情、我想說的話，但不希望別人一眼就看穿，甚至能隱藏我真正的想說的話。不曉得艾雪會走向抽象畫是不是也有這樣的原因，畫作中隱藏他真正想表達的。

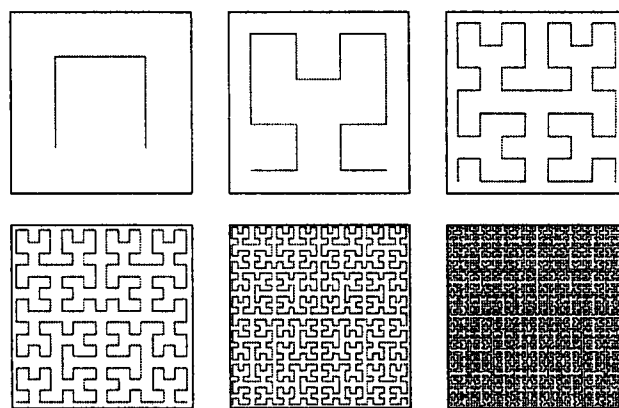
第五週 混亂之美—碎形幾何

七〇年代數學家曼德布洛特 (Benoit Mandelbrot) 問了一個問題：「英國的海岸線究竟有多長？」。他發現各家說法不一，誤差甚至可以高達 20%。就從這裏引發他對於碎形幾何的研究。

本單元一開始介紹幾個相當知名的碎形圖形：Koch 雪花曲線(圖九)、Hilbert 曲線(圖十)、Cantor 集和 Sierpinski 三角。這些圖形都具備碎形幾何圖形的主要特性：「在有限區域以自我規則複製的一種無限過程」。這些圖形除美觀之外，也具備某些有趣的數學性質，例如雖然他們是平面圖形，但其空間維度卻不是二維，而是分數維度。課程中說明了如何計算碎形幾何圖形的維度。此外，我們也介紹形成「曼德布洛特集」的迭代方程式並觀看一段「曼德布洛特集」的短片，讓學生透視「曼德布洛特集」圖形的微觀世界。



圖九 Koch 雪花曲線



圖十 Hilbert 曲線

畢達哥拉斯定理對同學而言是一個耳熟能詳的數學性質。課程中提到如何利用碎形幾何的概念製造「畢達哥拉斯樹」，以使學生理解簡單的原理也可以產生複雜而美的圖形。課程最後介紹和碎形幾何相關的數學概念：混沌理論。混沌理論的主要精神在於：「一個規律系統可能產生隨機結果。初始條件十分微小的變化，經過不斷放大，對其未來狀態會造成極其巨大的差異。」我們以一段短片讓學生認識何謂「有秩序的混亂」。

小組討論：(俊銘小組，詳細資料參見網站)

在這裡我先依正規的名詞解釋分形幾何－即是無限複雜又具有一定意義的自相形圖形和結構的幾何學，用自然界的生物來舉例，一片樹葉儘管無止近的放大，它的結構會不停的出現新的結構元素，而這個結構元素會一直相似但不是一模一樣，而數學上的分形藝術，即是用數學方法對發大的區域著色，這些著色的區域就變成精美的藝術圖案。所謂的數學方法想必大家都覺得抽象，其實就是用代號帶入數學程式運算，聽起來似乎很容易，但以 $1024 * 768$ 的螢幕就有 78643 個點，有些點需反覆試 1000 次以上才能放棄運算，進而產生一幅畫，換言之，是需要花費時間的，當然這樣的分形藝術我們可以稱作爲數位藝術。

面對同學提出的討論問題－分形藝術你覺得它算是藝術嗎？

對我而言，它是！因爲它其實並不是每次代入數字都會出現相同的圖形，藝術的複製性和開創性奠定了它本身的價值，加上你若是沒有具備足夠的美學概念，顏色搭配的成功與否不會這麼容易，程式只是個媒介，真正創作者還是在你本人。不過我也有另一個看法，藝術的價值若是建立在收藏價值上呢？這個收藏價值又以誰而定呢？其實我覺得只要你喜歡、符合胃口，那對你來說就是有收藏價值的阿？所以這個答案或者又是見仁見智吧！

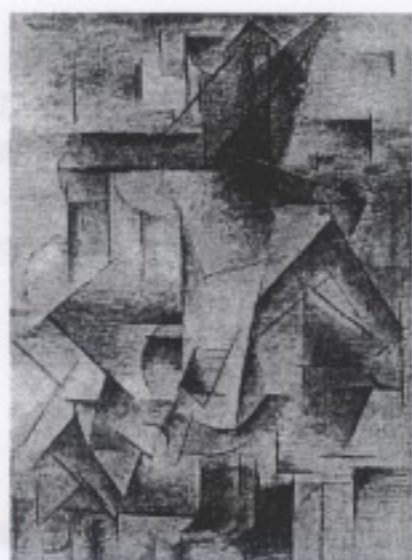
助教反思：(詳細資料參見網站)

培中：

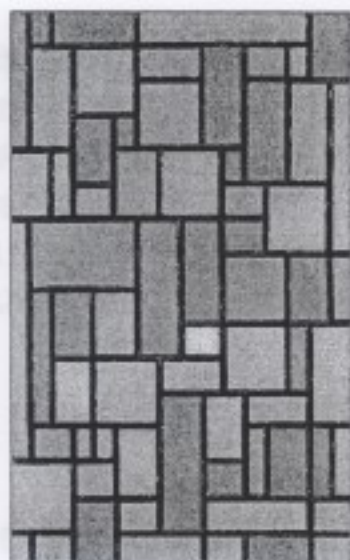
碎形跟無限的概念讓我非常得入迷，從簡單的圖形或特性不斷的重複結合產生出的圖案真的是無法形容的美，當然會這樣的喜歡這個主題可能也是因爲自己平常亂塗鴉方式有關，所以碎形主題的課程加上兩次的演講，讓我收穫很多，雖然身爲助教，但每次上課都讓自己當個專心的學生，從自己上課吸收到的內容消化後再跟同學進行討論，可以更有效的跟同學產生交集，雖然兩次的演講有講一些比較深入的內容以及程式的部分，讓部分同學沒辦法完全理解上課的內容，但是同學對於碎形圖案這個主題還是十分喜愛，以我這組來說，這個主題應該是前半段課程中最吸引同學注意的一個主題。

數學幾何經常被用於做為繪畫構圖之隱形骨架。然而，自二十世紀開始，幾何物件逐漸浮現於顏料之外，成為創作的主角。例如畢卡索的立體派抽象畫就是以直線與方塊來表現人物與景致(圖十一)。

本單元一開始將學生分為兩人一組，發給紙筆，要求學生仔細觀察後互相畫下同組的夥伴的臉像。緊接著學生被要求不得低頭看著畫紙作畫，只能眼睛一邊盯著同組夥伴的臉像一邊憑感覺描繪，然後將兩次作品做相互比較。這個活動的目的在於讓學生練習「心中有象，筆下無相」的一種「擬抽象」感覺。活動後學生觀看一齣記錄畢卡索作畫過程的影片，讓學生了解一位抽象畫家如何建構與解構自身作品。



圖十一 樂手



圖十二 樹



圖十三 弧中之圓

課堂上也進一步補充畢卡索 1910 年左右的立體派抽象畫，還有荷蘭畫家蒙德里安如何將一組名為「樹」(圖十二)的畫作從具象演變到抽象的過程。最後介紹抽象藝術始祖俄國畫家康丁斯基，在他的後期畫作中如何以幾何構圖表現他內心思維的外在世界(圖十三)。康丁斯基曾撰寫《點線面》一書闡述幾何物件在繪畫當中所代表的意象。課程中介紹了康丁斯基的生平與創作歷程，以瞭解他從具象到抽象的風格轉變，並試圖探析他以幾何物件作為創作元素的可能原因。為進一步讓學生體驗幾何抽象畫的精神，本課程的期中作業規定學生將這三位畫家的早期作品，以三位畫家自己的抽象方式表現出來。部份學生作品請參見課程網站。

小組討論：(昀儒小組，詳細資料參見網站)

大家對於畢卡索的畫，看起來有什麼不一樣嗎？

他畫的時候可能從不同的角度去思考，而且在他畫的同時可能他自己都不知道要畫什麼。難怪他的畫我們都看不懂，而且畫是如此高價。

也有同學不這麼認為，覺得他一開始就想好了，只是每一個人看得角度不同罷了。而且感覺不同的人、生活在不同的環境，一定會有不同的感受嘛！他的畫在當時是在世界上大有名氣的，而且很多人都想要自己珍藏，甚至連博物館都要高價買走他的畫。也可能只是運氣好罷了！

那你們感覺他的畫有價值去私人珍藏嗎？

我是不曉得啦！看他的畫得人很多，每個人都有他的想法，我是比較理性一點啦！所以買畫得人都也具有獨特的看法囉！

對幾何抽象畫覺得是理性還是僵硬呢？

每個同學對幾何的感覺皆不盡相同，也有同學覺得是感性囉。

助教反思：(詳細資料參見網站)

珮琪：

在幾何抽象畫的課程中，一開始同學看著對方互相畫出對方的樣子，之後再看著對方不看紙的畫出對方，從第一張畫與第二張畫比較後，發現第二張圖的臉都會畫的歪歪斜斜，從活動中可以看出同學們都非常的興奮，尤其是最後一排的同學，似乎看著彼此的畫開心的大笑，有些人把對方畫的很像，有些人卻不知道要怎麼開始畫，有些同學在畫第二張時，因為還不知道此活動的意義，偷看了紙張，爲了讓同學能體會抽象畫的感覺，所以再次的叮寧同學只能看著對方的臉畫。

課程中內容中提到：銳角：內在意念尖銳而具極度動能性。直角：造詣成熟之際的冷靜與感情的抑制。鈍角：製作完成後的不滿與軟弱無力感。之後介紹了一幅名叫流浪者的作品，一開始同學猜該畫主題一直猜不出來，後來公佈解答爲流浪者，同學竟然能對此作品做出解讀，「在畫中是流浪者在搶地盤，一些銳角圖形，爲流浪者搶地盤時的忿怒」，讓我覺得同學還真是有想像力，且在上課時吸收新知與作品混合的想法。

在期中作業方面，問了同學一些想法，同學面有難色的說擔心會畫不出來，我還是叫同學都盡量試著以自己的想法畫畫看。

本週邀請的是中央大學數學系單維彰老師前來主講「數學觸發的視覺藝術」。單老師首先談到他幾年前所開設的一門通識課程中，如何透過數學函數或方程式的圖像，去激發學生的藝術想像和創作能力。

因為許多圖形在日常生活中受很難體驗的到，緊接著單老師介紹幾張數學函數圖形說明為何數學可以觸發藝術家的視覺想像(圖十四)。單老師提到 paint, draw 和 plot 的不同。paint 和 draw 是我們從小透過美術課所熟悉的藝術創作方式，而 plot 稱為測繪，是根據數據資料所描繪的圖形。它是一種理性創作，不是隨心或隨情的感性創作，因此有別於圖畫。所謂根據數據資料就是以數學函數或方程式為依據作畫。荷蘭版畫家艾雪的作品一向被數學家們公認是「最有數學味道」的藝術品。單老師舉「藝廊」一畫為例(圖十五)說明艾雪如何將平面空間作旋轉扭曲以製造出一種無窮盡的效果，還有數學家如何以逆映射的方式將此畫還原為正常畫面。從這點讓人不得不佩服艾雪創作之精妙。

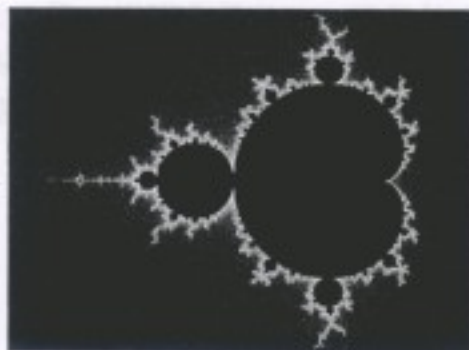
碎形藝術當然也是這場演講的重點之一。單老師說明曼得布洛特集遞迴複數方程式 $Z_{n+1} = Z_n^2 + c, Z_0 = 0$ ，並簡介如何以 Matlab 程式測繪曼得布洛特集的圖形(圖十六)。單老師所要強調的重點是，透過一些基礎的數學概念，你就可以製造出許多創意圖像，發現從來沒有人看過的新大陸。



圖十四



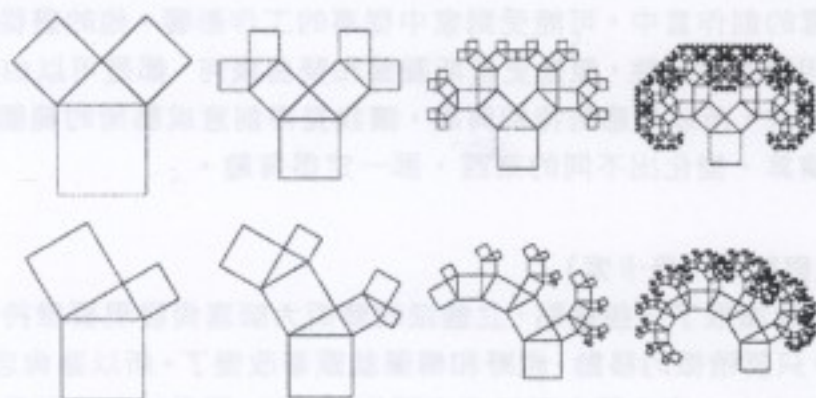
圖十五 藝廊



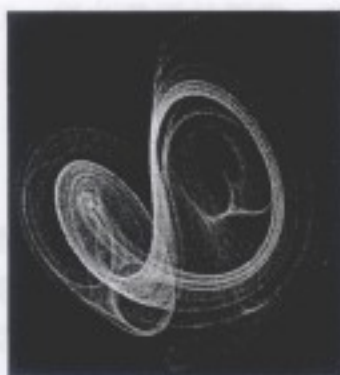
圖十六 曼得布洛特集

本週邀請數位藝術創作工作者吳文成老師蒞臨演講。吳老師首先以本課程之前所介紹過蒙德里安的作品為媒介，說明如何以 DBN 程式模仿與重構蒙德里安的風格。這種程序稱為名牌製造機，因為可以仿出 Burberry 的圖案款式。之後吳老師也講解如何透過數位藝術和碎形概念(如曼德布洛特集和畢達哥拉斯樹，圖十七)創作出迷濛的夢幻圖案。曼德布洛特集是由一個簡單的迭代(或稱遞迴)方程式 $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ 所建構出來。沒想到複雜之美背後竟隱藏著一個如此簡單的規則，也更讓人體會到只要透過「自我複製」和「無現過程」這兩道手續就可以建構出無窮的繁複之美。本次演講的另一個重點是混沌理論(圖十八)。混沌理論之特色在於只要起始值的微小差異，其結果就會衍生出巨大的變化，而這也正反映出大自然現象的不可預測性。最有名的現象就是所謂的蝴蝶效應：「一隻蝴蝶在南半球拍動翅膀所引起的氣流會在北半球引起一場颶風」。弔詭的是，這些不可預測性的背後事實上都是由許多可預測的規則所形成。因此透過數位藝術的技巧我們就可以模仿自然界的現象。吳老師也藉此展示數位藝術與人工生命的關聯。

從以上的介紹，我們可以體認到一種從簡單到複雜、從可預測到不可預測的形態之美，也讓人驚訝地發現，從數學概念竟能演化出一種不同於傳統藝術觀念的美學。



圖十七 畢達哥拉斯樹



圖十八 混沌理論

第九週 期中閱讀心得討論

本週課程重點是要求各組學生每人選讀一篇指定講義，並於小組討論中分享心得，之後撰寫成 150~200 字左右的文字報告上傳至各課程主題的欄位。茲舉部份學生報告如下：

洪楷涵(透視變換)：

透視—我認為是要讓物體有立體感或層次性，也就是延伸之後會不會焦點，再自然界則會形成一個焦點以上，但是畫家就運用這種關西，創作出一種「不完美的和諧」，玩弄透視這麼形容也不為過。

透視變換這篇文章大部分都是在說明空間、線條、點的關西，說真的有看難懂，我最討厭 3D 空間想像圖，因為我沒有立體感(或許天生缺乏吧)，完全對這篇文章不感興趣。

李佑齊(艾雪)：

這次所為大家介紹的是荷蘭藝術家艾雪，艾雪於 1898 年 6 月 17 日出生在荷蘭的 Leeuwarden，與他的四個兄弟一起在 Arnhem 長大。他的父親是一名土木工程師，他的 3 個兄弟都是從事科學和工程領域工作的，他並不偏愛數學，而是從事自己所感興趣的繪畫藝術。

我們發現在艾雪的創作當中，可能受到家中從事的工作影響，他的畫從複雜到簡單，我們可以從中看到相關的數學性，像是史密斯圓圖和雙曲幾何，都是可以由數學公式再加上艾雪的創一繪畫出來，所以我感到特別興趣，讓我覺得創意或藝術的範圍越來越廣了，如果可以從數學的演算，變化出不同的東西，那一定很有趣。

張莉琪(立體派與科學—畢卡索)

從這篇文章裡，我擷取了一些重點，立體派的藝術大師塞尚發現要維持傳統的單點透是根本是不可能的，只要稍微的移動，視野和構圖就跟著改變了。所以塞尚忠實於自己的眼睛。而立體主義努力求在二度空間表現三度空間的新方法，認為繪畫是從最單純的事物抽離出最簡單的形式。綜合性的藝術是由平面性質及應用的材料，創造出獨特的意象，運用在立體派上就成了綜合性立體主義了。

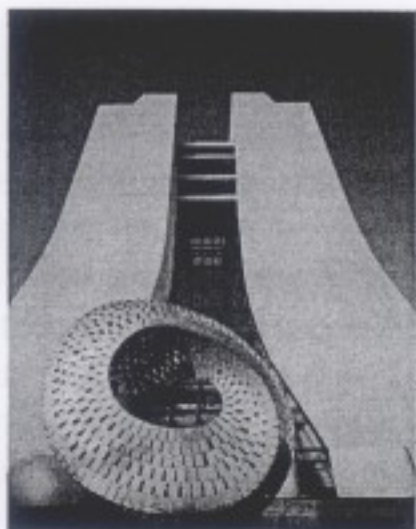
在繪畫時，的確只要一移動視野、構圖就跟著改變，但卻無法像塞尚和畢卡索一樣，畫出較抽象的作品。

姓名：蘇鵬宇 閱讀文章：數學黃金比例

心得：

看完了關於黃金比例這類的網站和資料，覺得大自然跟數學真的有很奇妙的關係，兩者看似不相干，但是卻無形中有相當密切的比例，黃金比例 1:1.618 還有費波納奇數列，跟大自然上的花瓣、螺類的形狀等等，關係很密切，看似不起眼的花瓣數目和螺類的螺型，卻可以以數學來表示，大自然真的很奇妙。

本週數學與雕塑單元在於介紹目前許多藝術家將數學意涵融入立體雕塑的作品。其中莫比烏斯環(Mobius Band)是雕塑藝術家最喜歡表現的主題之一。例如 Robert R. Wilson 的作品「Mobius Band」(圖十九),目前陳列於美國國家費米實驗室前廣場,充滿科學與美學結合的圓潤韻味。John Robinson 創作的「永恆」銅雕(圖二十),目前陳列於澳洲坎培拉的市民中心也是以莫比烏斯環作為素材。John Robinson 的數學雕塑創作豐富,並充滿許多變化,是目前數學藝術界相當活躍的人物。另外科斯塔曲面也廣受藝術家歡迎,許多藝術家以雪雕和石雕的方式表現這「極小曲面」的俐落個性(圖二十一)。而在「碎形」單元曾介紹過的「席爾平斯基三角」和「畢達哥拉斯樹」(圖二十二)也是藝術家喜歡以立體雕塑創作的主题。講到數學立體藝術當然不能錯過從古希臘流傳至今的五個「柏拉圖立體」。「柏拉圖立體」不僅蘊含數學之美,也有著深遂的哲學意涵。尤其十七世紀初天文學家克卜勒將其作為太陽系的運轉模型後(圖二十三),更添加其科學美學的色彩。或許是受本單元影響,學生的學期末作品有大都選擇創作雕塑作品。



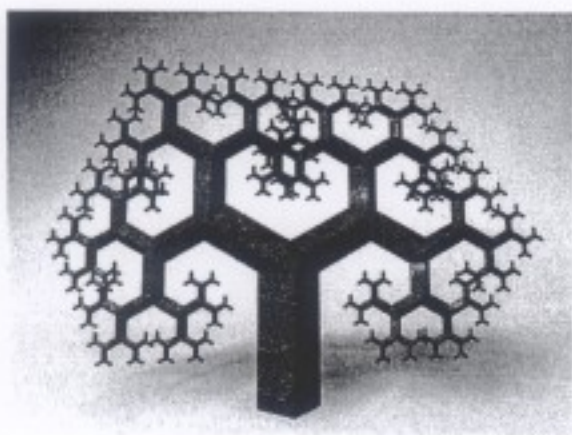
圖十九



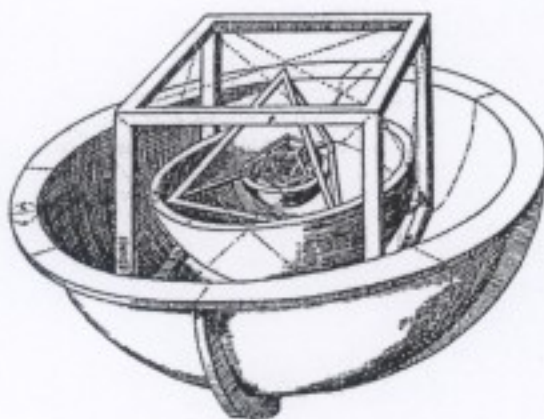
圖二十



圖二十一



圖二十二



圖二十三

助教反思 (本週無小組討論)

芹韋：

這週的主題是數學雕塑。老師介紹大量以數學為發想主軸的作品，更有許多成為公共藝術，讓生活中也能充滿數學。這週和同學在討論期末作業時，數學雕塑也給我們新的發想。尤其「莫比烏斯環」的變化，的確引起小組成員熱烈的討論。討論中，大家開始有自己被觸發的意見，也能漸漸將一些數學專有詞彙應用進討論中，很開心！

冠男：

老師本週介紹了達文西手繪之正多面體，沒想到不同的多面體在古希臘卻是代表不同之元素，另外也介紹了許多含有簡單數學概念的公共藝術作品，像是科斯塔曲面雪雕、希爾伯特方塊、席爾平斯三角紙雕等。其中組員們分別對於創世紀以及胚胎的作品十分有興趣，希望能嘗試利用不同材質或是作法將作品重新呈現出來。

培中：

老師這週上課的內容讓同學能夠從別人的作品中尋找期末作品的靈感，我這組的同學雖然上完課後並沒有對期末成品立刻有太多的想法，經過幾次期末作品討論後，好像有蠻多同學因此想要參考這次上課呈現出的作品來當作期末的作業，當然還是希望組裡的作品能夠有些不一樣的呈現，畢竟照著別人的作品當作模仿的對象做出來的成品就缺乏了創新的元素，縱使採用不同的材料元素下去製作，也很難弄出全新的感覺，而且要超越大師級的作品是很有難度，這樣在完成作品時得到的成就感也比較容易偏低，所以希望在未來幾周跟組員討論時能夠對期末成品有更多明確的方向跟逐步建構出雛形來，期待我這組的組員能夠用簡單的成品呈現出不一樣的數學與藝術的結合。

第十一週 數學與音樂探索活動

本週數學與音樂探索單元主要是想要透過同學親身體驗的方式，讓他們領略音階的探索過程和音樂與數學比利的關係，也為下週的課程內容做鋪陳。我們所採用的探究工具是水和玻璃杯。在這活動之前，我帶領助教將整個活動做一次測試，讓助教瞭解學生有可能遇到的困難。但是也同時提醒助教在活動進行時不可以給與同學任何直接的協助，只能透過提醒的方式讓他們自己摸索前進。

活動一開始將學生分組(一組至少八人)，各組任務是以玻璃杯盛水之後，學生必須能以筷子敲擊玻璃杯的方式，正確地敲打出 Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do 等八度音。學生成果展現方式則是由各組利用已經盛裝不同水量的玻璃杯演奏曲子「小星星」。之後由教師與助教評分，選出最佳音準和順暢的演奏團隊並頒獎。

下列三張圖片(圖二十四 a,b,c)為學生進行探索活動時的情況。學生的成果展現影片已上傳到課程網站。



圖二十四 a



圖二十四 b



圖二十四 c



五十二圖



五十三圖



五十四圖

第十二週 從畢氏音階到十二平均律

經歷過數學與音樂的體驗活動後，課程開始介紹歷史上音樂與數學和天文學之間的關係。據說古希臘數學家畢達哥拉斯路經打鐵舖時發現不同重量的鐵鎚可以敲打出不同音階的樂音。之後他更進一步發現鐵鎚重量成整數比值「12:9:8:6」時，所敲打出的樂音最為和諧。之後畢達哥拉斯和門徒就不斷地進行實驗測試，因而創出畢氏音階(圖二十五)。

基於古希臘數學家畢達哥拉斯所制定的畢氏音階，於西元二世紀時天文學家托勒密將其修編為純率音階。到了文藝復興時期由於人文主義抬頭，曲風上對於音階劃分的要求更為細緻，因而產生「十二平均律」的概念。但這個概念得以實現完全是建立在數學的基礎之上。因為要將八度音劃分為十二等份(見下式和圖二十六)

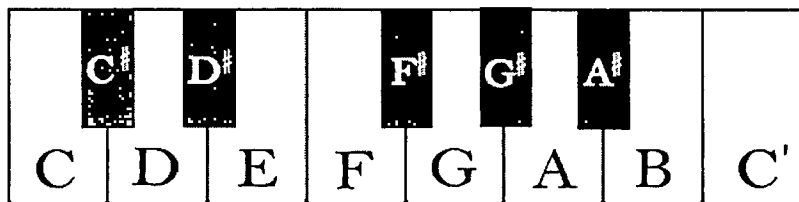
$$\frac{C^\#}{C} = \frac{D}{C^\#} = \frac{D^\#}{D} = \frac{E}{D^\#} = \frac{F}{E} = \frac{F^\#}{F} = \frac{G}{F^\#} = \frac{G^\#}{G} = \frac{A}{G^\#} = \frac{A^\#}{A} = \frac{B}{A^\#} = \frac{C'}{B}$$

除了需要計算 2 開 12 次方根外，在幾何作圖上也要求精確，也就是需要比例中項的概念(圖二十七)。而這些都有賴於歐幾理得幾何學於文藝復興時期的再生才有可能。所以課程中也介紹當時許多數學家在樂理方面的貢獻。

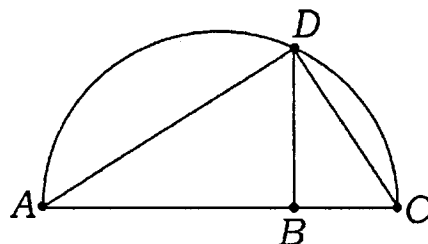
另外課程中也提到，明朝世子朱載堉於《律理精義》一書也提出「十二平均律」的想法，這比西方的概念還要早。



圖二十五



圖二十六



圖二十七

助教反思 (由於時間關係，本週以討論區討論的方式取代課堂小組討論)

均儒：

從一開始的音樂棒示範給同學們看，真的還蠻有趣的；今天老師介紹的是從希臘四藝開始到 15 世紀後的七藝，原來這都是畢達哥拉斯的發現，他所提出的凡物皆數，我還蠻讚同的，像是敲鐵鎚的聲音，也是可以算出比例的，我們這組的同學剛好有去南投參觀，也發現不同粗細的鐵鎚在敲擊時，有發出不同大小高低的音量，都是可以利用數學算法求出解來。

討論到貝多芬「第五交響曲」竟與黃金比例符合的問題時，大家覺得蠻神奇的，但也有同學認為只是剛好、巧合或“偶然”，同學們目前覺得數學與音樂還是分開的，只是後來的人將數學更納入音樂的音節中。

桂菁：

數學與音樂的對話這個單元，老師設計先讓學生做敲水杯的活動，讓學生感受水量比例和音高低的關係。我這一組組員做此活動，我發現他們有很好的觀念，例如，先調出一個音出來及利用水量的多少去尋找與音高低的關係...的意見。他們有很好的觀念與意見，但他們缺乏一位能把這些意見整合起的人。

在上完數學與音樂的對話課程後的討論，與他們檢討上一週做活動時的優缺點及數學與音樂之間的關係，但大多數組員並不認同數學與音樂之間有一定的關係存在，他們認為不一定是十二平均律，才定義現在的鋼琴。

有一個古老的傳說是，千年前一間印度古佛寺的大殿中矗立著一座有三根金柱的平台，其中最左邊的柱上套著六十四個由大而小的金環。寺內高僧交代其弟子在他圓寂之後必須每分鐘將其中一個金盤移動到另一根金柱上，不過大金盤絕對不可疊放在小金盤之上。當六十四個金盤都被移到另一根金柱時，寺廟即將倒塌，而世界也隨之毀滅。

本課程活動藉由這稱為河內塔(或梵天塔)的活動(圖二十八)，讓學生從操作教具的過程體驗數學歸納的思考藝術。學生從一開始的茫然、困惑，再到掌握規律，進而列出公式，親身經驗數學家探索數學規律的過程。學生所發現的規律有下列兩種：

圓盤個數 n	1	2	3	4	5	...	n
移動次數 $f(n)$	1	3	7	15	31	...	$2f(n-1)+1$

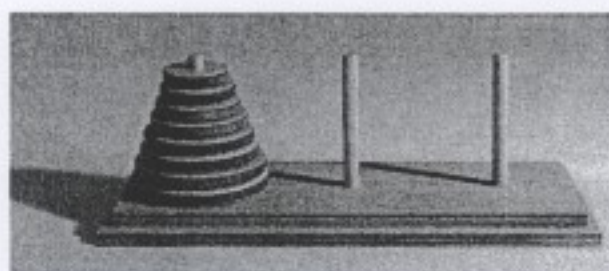
圓盤個數 n	1	2	3	4	5	...	n
移動次數 $f(n)$	1	3	7	15	31	...	2^n-1

課程中進一步要求學生進行推論以說明為何所推導出的公式是正確的。這需要上述兩種公式相輔相成。本課程活動的目的主要讓學生練習以下各項能力：

- 操作能力
- 嘗試錯誤的能力
- 尋找模式的能力
- 建立假設的能力
- 推論的能力
- 證明的能力

我們發現，學生前四項的能力不錯，但推論與證明能力則明顯不足，而這應該也是科技大學學生普遍的現象。

本週第二部份則接續介紹其它數學問題讓學生體驗尋求規律的經驗。最後我們告訴學生數學知識發展的三個典型階段：1. 觀察--對現象的因果或相關事物間關係的記錄；2. 歸納與猜--想從所收集的有限資料與數據推衍出對一般規律的假設；3. 證明--驗證假設。



圖二十八

小組討論(昀儒助教小組，詳細請參見網站)

1.從這堂課你覺得數學思考與藝術思考有類似的地方嗎？

在實際移動梵天塔的時候多移幾次就可以知道移到地幾層要看奇數片或是偶數片可以達成最少次數不失誤，而漸漸推導出規則。

2.數學家探索數學公式時會先經過操作與歸納之後找出規律，再設法證明。藝術家呢？他們如何探索藝術規律？他們會去證明藝術規律嗎？

藝術家好像比較少看到這樣的歸納法，他們往往出現『拿手』創作，每一位藝術家所拿手的藝術創造手法都不一樣，但是每一位藝術家去創造同一件事物的方式接不盡相同。

3.數學家遇到陌生的題目時會先依靠直覺判斷其可能的結果，再設法證明。藝術家呢？他們如何利用直覺去處理陌生的題材？

藝術家的直覺，也許會直接用嘗試的方式去處理陌生的題材，漸漸的他們會探索出如何詮釋可以更好去表達這個陌生的題材。

4.數學家經常透過假設尋找規律，藝術家創作時會需要假設嗎？為什麼？

藝術家的假設，可能就有點像是草稿或是嘗試，甚至是直覺，就要看他們的思考模式，怎麼去看待他們想要創造的藝術。

助教反思

珮琪：

在課堂活動中，同學記錄每個圓盤個數與移動次數，從中找出河內塔的規則，我將同學分為二組，第一組的同學很認真，討論後找出了兩個公式，而另一組的同學排了兩個圓盤就找出了公式，問同學要如何去證明公式的正確性呢，同學開始排河內塔去驗證了公式，雖然兩組同學前後都找出公式，不過要將八層河內塔流暢的排完，還真是個不可能的任務，有幾個同學非常有興趣不斷的練習；透過河內塔活動讓同學思考，除了操作方面還有假設、推論及證明的能力。

芹韋：

梵天塔個活動對同學來說的確是一項挑戰。我的小組成員幾乎都在第 6 層就已經無法成功了！有些人開始從第 1 層至第 4 層找規律，漸漸找到關於數學的「韻律感」。雖然活動進行的時間不長，但同學們卻還能在課後找一些「線上玩梵天塔」的網站來跟我交流，顯見這個活動對同學們很有啟發喔！

學生對於數學的抽象化經常有學習上的困難。實際上，就如抽象藝術一般，數學的抽象化只是個過程，絕非目的。本週單元透過解決七橋問題的操作，讓學生瞭解數學問題如何透過抽象的過程以簡取繁。

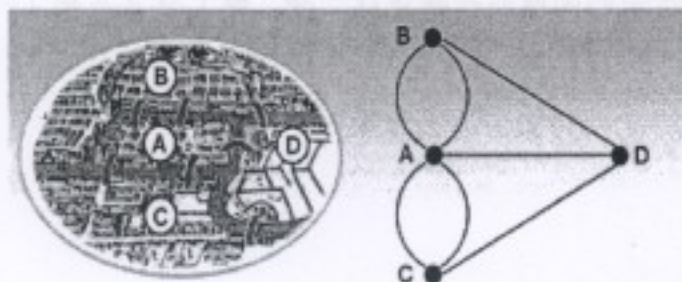
十八世紀時東普魯士境內的哥尼斯堡(Konigsberg)被城市中的Pregel 河分割為四塊陸地，在河上共建有七座橋以連接各區域(圖二十九)。哥尼斯堡居民的休閒活動便是嘗試能否一次走過七座橋，且各橋都不能重複走過。他們的具體問題是：

1. 是否可能從某地出發經過七座橋後(每一座橋只能經過一次) 又回到原地?
2. 若起點與終點不須一樣是否可能一次走過七座橋且每一座橋只能經過一次?

由於市民一直未能解決這個問題因此流傳開來，形成所謂的七橋問題。當時的瑞士數學家歐拉(Euler)得知後便嘗試替哥尼斯堡居民解決這擾人的難題。他所採取的策略是將整個城市的地圖抽象化，以點代替四塊陸地，以邊代替七座橋，因此整個問題被抽象成一個探討點邊關係的圖形問題。結果歐拉發現第一個問題的答案是各點(陸地)都必須連接偶數座橋方才可能。第二個問題的答案是只能兩個點連接奇數座橋，其餘點都必須連接偶數座橋方才可能。課程中將讓學生做探索並觀察他們是否會嘗試將地圖抽象化(圖三十)。結果發現，大部份同學都直接在地圖上操作，只有少數人以抽象圖形取代。課後的活動則讓學生思考為何數學家解題時會將問題抽象化？數學的抽象化和繪畫的幾何抽象化有何異同？



圖二十九



圖三十

小組討論 (珮琪助教組，詳細請參見網站)

(1)你解七橋問題時碰到什麼問題？

Ans:

首先把假設定為橋能一次走完，加上沒有更清楚的分配與規劃，導致花了許多時間，最後才把假設改成是走不完，才開始有了清楚規劃。

(2)數學家為何將具體問題抽象化？

Ans:

把複雜的東西簡化成代號或者標誌，這樣才能夠方便思考與運算，而整理成一個系統架構。

(3)抽象數學和抽象藝術有何異同?(請說明不同處與相同處在哪)

Ans:

不同處:抽象數學是抽象成數學式子來做運算，而抽象藝術是抽象成角度關係或者矩形變化。

相同處:抽象成數學式子跟角度就會跟數字有相同關係，且都是將複雜的事情整理成簡單的表示方式。

助教反思

培中：

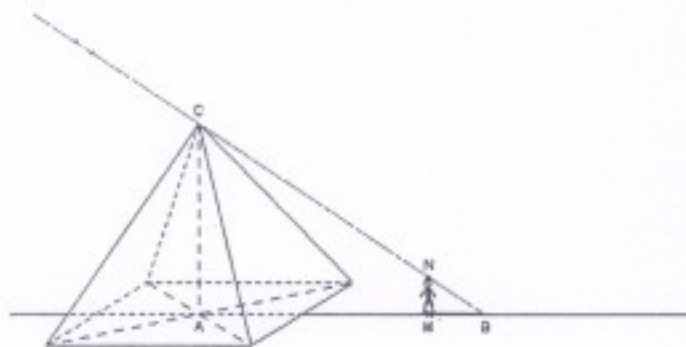
活動進行的時候，有觀察到同學很快的就會七橋問題的地圖化簡成簡單的圖形跟數字組合，有些人的化簡方式可能並沒有太大的意義，但是還是有人能夠將地圖化簡成很正確的拓樸結構，但是多數的同學都預設這個問題是有解的，在活動的過程中只是不斷的使用不同方法去走那七座橋，沒有同學在短時間內提出這個問題可以解決的方法，也可能是因為同學想法中老師丟出來的題目應該就是有解，所以在老師講解前都沒有人會主動的轉變思考題目的方向，接是從如何以現有的七座橋來達成目的，而不是怎樣條件下可以達成順利走完地圖上的每一座橋。

一般人對於數學思考的直接印象都是邏輯推理。事實上邏輯推理只是數學思考的一部份，是屬於後半段的工作。數學思考的前半段經常與創意的發想有關。本單元重點在於讓學生了解數學家如何利用數學創意解決問題。

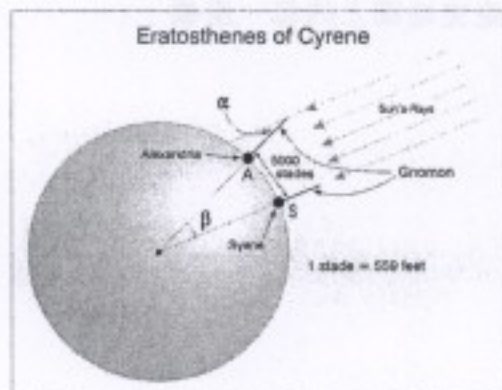
課程內容從古希臘數學家的數學創意談起。例如米利都學派得泰利斯(Thales)在埃及時被問到如何測量金字塔的高度，他以簡單的日影關係和相似三角形線段成比例的性質就輕易解決這個難題(圖三十一)。還有天文學家阿利斯塔克(Aristarchus)利用日常所觀察的天文現象，再搭配三角函數的關係，就估算出太陽與月球跟地球距離的比例，也據此知道太陽、月球與地球的大小關係。由於太陽最大，月球最小，因此他斷言月球繞地球旋轉，而地球繞太陽旋轉，可說是當時古希臘倡導日心說最具說服力的證據。不過由於測量上的誤差，阿利斯塔克所得的比例結果與現今我們所知道的正確數據差別很大。但是以當時的水準而言，阿利斯塔克的想法可說前無古人。到了亞歷山卓時期，埃拉托森內斯利用夏至太陽位於正上方的自然現象，再搭配平行線內錯角相等的基本性質就估算出地球的圓周長(圖三十二)，其誤差也僅有百分之五。而古希臘將數學創意發揮的淋漓盡致的則非阿基米德莫屬。他以敏銳的洞察力求出圓面積與球體積可說無人能及。

除古代數學創意外，課程中也談及非歐幾何學的誕生與發展。在經歷一千多年理所當然的習慣之後，十九世紀數學家開始思考扭曲與非平面的幾何學。例如鮑耶質疑通過一定點是否可以做出兩條直線平行於原先給定之直線？藉由這天馬行空的猜疑，他發現確實存在與歐幾理德互相獨立的幾何學，也為二十世紀愛因斯坦的相對論奠下數學基礎。

透過這一單元，我們希望學生能體會數學思考彎柔的一面，讓學生認識到，即使只有基礎的數學能力，只要善用想像力和創意也能產生意想不到的效果。



圖三十一



圖三十二

小組討論 (冠男助教組)

1. 數學創意思考?(今日上課內容)

愛因斯坦能提出黑洞理論和時光倒流這些想法實在很厲害，常人根本不會去想到那些東西，很佩服那些學家。

2. 數學創意思考與藝術創意有何不同?

數學比較重理論的算出正確值，而藝術方面比較抽象，比較是由感覺跟想法去創作出來的。

3. 對今日上課內容，哪部分的數學推理較有印象?

測量地球大小，因為他能在兩千年以前，用我們現在國中就會的簡易數學，大概的推算出地球的大小，令人很驚奇。

小組討論 (芹韋助教組)

Q. 數學創意和藝術創意有何相同?有何不同?

孟奇賢: 相同的地方都有個人的主觀

楊家宜: 不同的地方在於數學是邏輯性的，藝術是主觀的

蔡立國: 數學創意要有基礎的，藝術創意會因為個人的知識、個人的生長背景和個人的觀點不同會有所不同

助教反思

培中:

這一個主題的課程，同學也曠感興趣的，討論的時候，雖然同學沒辦法相信會有人平常會去看太陽的位置，然後想出怎樣計算太陽與月亮的距離關係，討論中希望同學能夠分享些數學家的創意與藝術家的創意之間有什麼差異，剛開始同學還不太確定要怎樣去回答這個問題，覺得問題很模糊，直到有同學分享說數學家的創意是要用來解決所遇到的問題，而藝術家的創意就是將自己所想到的東西用創作表現出來，數學家的創意源自於生活中，中只要用心就能去觀察體會的到，而藝術家的創意是天馬行空的，往往反而是要用來表現一些生活中無法觀察得到的東西。

本週課程是讓學生欣賞改編至小川洋子的小說「博士熱愛的算式」的這部電影(圖三十三)。故事敘述一位在大學研究數論的數學博士，因為突如其來的一場車禍，致使腦部受損，從此以後記憶只能停留在車禍那一年之前，而他的記憶則只有 80 分鐘的有效期限。為了照顧這樣的博士需要聘請管家，在管家照顧博士的生活起居中，她發現博士愛的表達方式—透過一個又一個的數學算式。博士熱愛的算式是什麼？就是數學中最美的等式： $e^{\pi} + 1 = 0$ 。故事中博士一次又一次向管家展現數字的結構之美，竟也讓管家不自覺地做起數學家的工作。當然更感人的是刻畫博士、博士的嫂嫂、女管家和她的兒子四人之間的微妙情結。就如同公式中不同數字的排列方式所表達的隱喻。 $e^{\pi} = -1$ 代表殘缺，而 $e^{\pi} + 1 = 0$ 則表示圓滿。播放這部電影的目的是想要讓學生在體會數學思考的活動之後，讓他們欣賞數學家的內心世界，以期更進一步認識數學之美。



圖三十三

本單元並無進行小組討論，而是請他們上討論區發表看法。茲節錄一位學生的感想如下：

張惠穎 回覆於 2010-01-17 03:22:30

這部由小說改編的電影，作者藉博士之口，講述數學之美：「正因為對實際生活沒有幫助，數字的秩序才顯得優美」、「瞭解了質數的性質時，既不會給生活帶來方便，也賺不了錢」，至於在故事中扮演重要轉折的「熱愛算式」，作者不曾詳細解釋過，包括為什麼熱愛？是不是熱愛？事實上除了衝突的一刹那，博士從來沒提過這個算式，只隱隱約約間，讓觀眾猜測或許代表了某種約定，存在於博士與嫂嫂之間的過去。

故事的引人欲罷不能，一大原因可能是敘事中穿插的「數學」，但根本上，這些充滿魔力數字的段落，並不是數學，純粹只是數字，或數字與數字間的關係，只是對大多數的人來說，「所有的人都怕數學」這句話，可能比世上所有的數學恆等式還要更接近真理啊。透過溫馨故事的覆蓋，讓我感受到數學並不只是理性的運算而已，博士將充滿玄外真理的，譬如友誼數、完全數、質數、質因數、三角數、過剩數、不足數...種種魔幻數字給感性化了，不要過度嚴肅的看待數學或數字，那麼將會發現他們是如此無所不在地充滿在我們的生活裡。不過或許這只是要增加劇情的活潑性，我覺得日本在數學教學這方面是興當有趣的，即使是高中生也使用了教具（還有轉盤效果），加上人生故事把硬梆梆的公式擬人化，我相信這樣的教學一定會使不少學生不畏懼數學甚至會愛上它的。

第十七週 數學與藝術期末闖關活動

最後一週的課程我們採取闖關的方式進行。整個活動共有七個關卡，各組學生最先完成者頒贈小禮物。這七個關卡的內容涵括整個學期各上課單元和指定講義的內容，例如梵天塔、透視法、多面體、數字規律、黃金比例等等(圖三十四)。活動方式有教具操作、題目問答和比手畫腳。活動構想來自於助教群，他們有感於有些同學課後沒有上課程網站做持續學習的習慣，因此提醒同學在活動之前上課程網站複習課程內容以求闖關順利。其活動目的在於透過趣味競賽的方式，檢驗同學們一學期以來對於課程內容認知的程度，並學習團隊合作解決問題的能力，其效果頗受好評。整個活動雖然延後半個小時才下課，但同學們都留到最後才走，沒有怨言。許多學生對於採用這種寓教於樂的方式印象相當深刻，茲節錄部份學生在討論區的留言以供參考。



圖三十四

這次設計的闖關遊戲真是太有趣了，不但讓我們活動筋骨地下 1、2 樓跑來跑去，也讓我們絞盡腦汁，發揮團隊精神，每道題目真的都跟課程內容息息相關，像是組合出多邊形、畫出消失點計算出值、梵天塔....等等。真的好久沒有玩到闖關遊戲了，讓我們就好像回到了小時候，當然也要感謝助教們設計出這麼好玩的遊戲。

林懷鈺 回覆於 2010-01-16 11:59:08

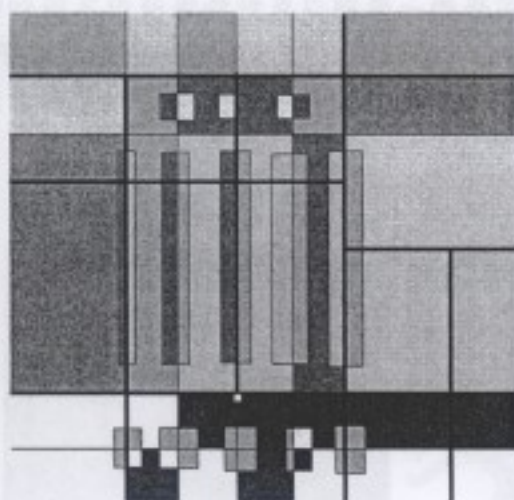
對於這一次的闖關活動，我覺得很好!!!! 因為每一個細節地方都有照顧到，譬如每一關的行走路線，讓我樂在其中，整天下來，透過每個關卡，全組都有參與到，非常印象深刻，真的很感謝每個助教一個月多的思考，才能讓我們印象深刻，同時感謝我這組的瑛琪助教，在她一整個學期的照顧，我才能更積極的參與這次課程。

學生期中作業與期末作品

本課程的期中作業規定每位學生將畢加索、蒙德里安和康丁斯基三位畫家的早期作品，以三位畫家自己晚期的抽象風格表現出來。學生可以採取手工或電腦繪圖的方式完成，評分重點則以學生能否抓住畫家風格的神韻為重點。茲列舉部分學生的作品如下(圖三十四 a, b, c)：



圖三十四 a

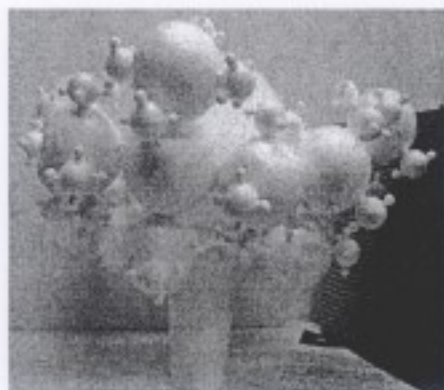


圖三十四 b

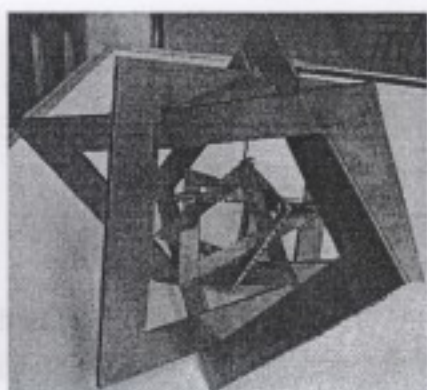


圖三十四 c

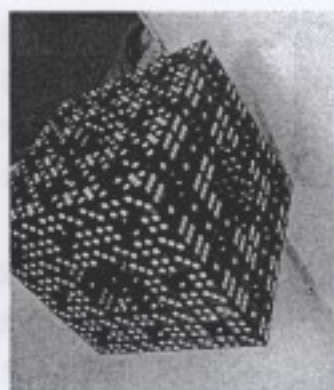
期末作品則以每一小組為單位繳交。學生可以依各自的創意設計平面或立體或電腦藝術品，但必須將數學意涵融入其中。為協助學生能夠順利完成心目中理想的作品，特邀請竹雕藝術創作者李弘偉老師於課後時間指導學生構思並創作期末作品。評分則由計畫主持人和李弘偉老師分別就數學意涵和美感表現評分。茲列舉部分學生的作品如下(圖三十五 a, b, c)：



圖三十五 a



圖三十五 b



圖三十五 c

執行成果分析與檢討

感謝教育部優質通識課程計畫之支持，使得本課程得以有充分的人力與物力的支援，順利完成本計畫性課程。如一開始所述，本課程的具體目標有下列幾項：

- 一、從歷史角度讓學生瞭解黃金比例與透視法則的數學淵源，和它們在藝術中之應用；
- 二、嘗試了解並親自體驗藝術家以幾何物件融入作品的想法，和他們數學靈感的來源；
- 三、從歷史角度讓學生瞭解音樂和數學的關聯，親自體驗音階與數學比例的密切關係；
- 四、透過具體操作讓學生體會數學思考的模式，例如模式歸納、抽象演繹和數學創意；
- 五、透過體驗理性和感性交會的區塊，激發學生反思數學與藝術兩者之間本質的異同。

本課程預計透過課堂講述、專家演講、小組討論、課後學習、指定閱讀與作業和活動探索等多元方式達成上述目標。個人認為大致上已達成前述預期目標，但仍有諸多需要改進之處，敘述如下：

1. 關於助教背景與訓練

本課程助教全部由本校國立勤益科技大學的研究生擔任，其藝術人文方面的訓練本就較為缺乏。再者，他們以往課程討論的經驗也不足，因此要他們帶班討論也是一大考驗。以往個人主持「個別型通識教育課程計畫」時曾聘請外校人文系所研究生前來協助，但發現他們和學生課後相處時間相當有限。考量對研究生表達能力的訓練也是教育部優質通識課程計畫的目的之一，因此本次計畫全部採用本校研究生。結果發現，雖然討論的情形並不完全圓滿，但是助教們相當努力自我充實，針對本身不足之處也會請教老師或自行閱讀進修，協助學生發展自我觀點，課後與學生的接觸更是頻繁。由於助教們的通力合作和構想，才能完成許多課內外的學習。

2. 關於課程設計的方向

本課程是一個跨領域課程，目標在於讓學生體驗「藝術中的數學思考」和「數學中的思考藝術」。原本這兩個區塊理想上應該是等量均衡，但考量到課程素材的適當性與學生選課與學習的特性，前者的比重確實較高。根據計畫主持人的經驗，技職院校的學生不喜歡理論性太濃或學術乘載度太高的通識課程，所以當初課程設計時就調降數學方面的比例。當然這和選課學生的背景有關。例如這門課程也曾針對人文和商管背景的學生開課，數學內容的效果就不理想。本課程中的學生大多為電子系科，對數學接受程度較高，所以日後針對他們開課時應該將數學思考的部份再做調升。

3. 關於學生閱讀與寫作能力的提升

雖然本課程安排許多操作活動，但是透過閱讀深化同學的認知，和增進學生寫作的表達能力一直是本計畫課程一開始所設定的重點項目。然而技職院校學生似乎對於閱讀補充資料仍有排斥。雖本課程網站共上傳十數篇自編講義或專家學者的文章，我們仍發現學生自動下載閱讀的動機仍顯不足。所以課程安排期中閱讀心得討論這個單元和期末闖關活動，以半強迫的方式激勵學生閱讀。雖然從他們的發言中發現閱讀深度仍不夠，但是比起之前的課程實

施經驗，情形已進步許多。

有鑒於以往經驗，學生慣於從網路下載文章檔案或抄襲的方式繳交期末報告，所以這學期改以各小組成員輪流寫討論報告和期末考紙筆測驗的方式培養他們的寫作能力。當然比起傳統的期末報告，這樣的方式在寫作質量上都顯不足。只是如何在「做中學」、「讀中學」和「寫中學」三者之間做取捨與取得平衡一直是通識課的一個挑戰。

結論與建議

從歷次執行課程計畫的經驗當中，個人覺得執行這次「數學與藝術」的計畫是最順手的一次。無論從網站設計，課程安排、協同教學、和作業設計等方面來看，個人都已經比較能夠掌握優質通識課程的內涵與精神。感謝教育部優通計畫的補助，讓個人充分體會做中學的樂趣與意涵。也建議教育部中綱計畫未來能持續補助其它有心改進通識教材的老師，甚至更進一步列為教學卓越計畫的評審重點之一。如此一來，技職院校的通識教師就宛如遇見沙漠中的一縷甘泉，保有能量繼續往前邁進。